Fiche méthodes sur les asymptotes

Soit f une fonction numérique définie sur D_f

et soit C_f sa courbe représentative dans un repère $(0\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,)$.

Comment déterminer une asymptote parallèle aux axes

Suivant les résultats sur les calculs des limites aux bornes de D_f,
on peut en déduire l'existence d'asymptote(s) parallèle(s) aux axes.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

Alors la droite D d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe C_f

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$

Alors la droite D d'équation $y = b$ est asymptote à la courbe C_f au voisinage de $\pm\infty$

exemple :

Soit la fonction f définie sur $D_f =]2;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$

Calculer les limites aux bornes et en déduire l'existence d'asymptote(s) éventuelle(s)

Limite en $+\infty$ *:* il faudra d'abord lever l'indétermination

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-2} = \frac{x\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)} = \frac{3+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(3+\dfrac{1}{x}\right) = 3 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1-\dfrac{2}{x}\right) = 1 \end{array}\right\} \text{d'où par quotient: } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$$

Pour reconnaître l'existence d'une asymptote , il doit y avoir une valeur finie et une valeur infinie dans la limite de f

La droite D d'équation $y = 3$ est asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

Limite en 2^+ *:*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2} (3x+1) = 7 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (x-2) = 0^+ \end{array}\right\} \text{d'où par quotient: } \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

Donc la droite D d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe C_f

Comment déterminer une asymptote oblique

Pour vérifier que la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à C_f :
$\rightarrow$ on calcule d'abord et on simplifie l'expression suivante : $d(x) = f(x) - (ax+b)$
$\rightarrow$ puis on calcule $\lim\limits_{x \to \pm\infty} d(x)$, et si celle-ci est nulle , alors on peut conclure .

On a : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad C_f$ est asymptote à Δ. au voisinage de $\pm\infty$

exemple : Soit la fonction f définie sur $D_f = \left]-1;+\infty\right[$ par : $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{1}{x+1}$
Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x + 3$ est une asymptote à C_f .

On a :
$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - (2x+3) \\ &= 2x + 3 + \frac{1}{x+1} - (2x+3) \\ &= \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ donc par quotient : $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = 0$

Par conséquent , comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (2x+3) \right] = 0$, on en déduit que C_f est asymptote à la droite Δ , d'équation $y = 2x + 3$, au voisinage de $+\infty$.

Rappel : Pour déterminer la position de C_f par rapport à Δ , il faut étudier le signe de : $d(x) = f(x) - (2x+3)$.

- si $d(x) > 0$ sur I alors C_f est au-dessus de Δ sur I .
- si $d(x) < 0$ sur J alors C_f est en dessous de Δ sur J .

Etant donné ici que $d(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $d(x)$ est du signe de $(x+1)$
Par conséquent sur $D_f = \left]-1;+\infty\right[$: $d(x) > 0$
On en déduit alors que C_f est en dessous de Δ sur $D_f = \left]-1;+\infty\right[$