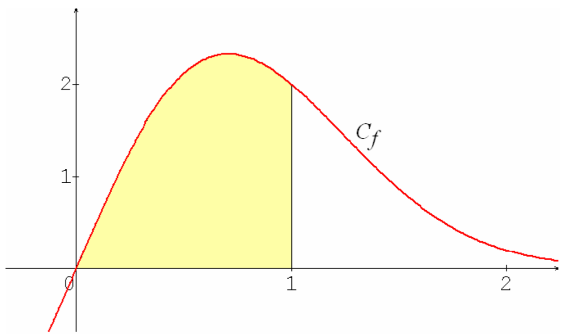
Aires et intégrales

Aire sous la courbe

Soit la fonction f définie sur R par $f(x) = 2x.e^{1-x^2}$ et Cf sa courbe représentative dans le repère orthogonal ci-dessous .

On demande de calculer l'aire sous la courbe entre 0 et 1 .



C'est-à-dire l'aire du domaine D délimité par la courbe Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Le domaine D est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que : $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$

La fonction f étant positive sur $[0;1]$

L'aire A du domaine D est donnée par l'intégrale suivante : $A = \int_0^1 f(x)dx$

On détermine d'abord une primitive F de f sur $[0;1]$.

$$f(x) = 2x.e^{1-x^2} = -\left(-2x.e^{1-x^2}\right)$$

Comme $f = -u'.e^u$, on en déduit que $F = -e^u$

$$F(x) = -e^{1-x^2}$$

On calcule ensuite l'intégrale :

$$A = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(2x.e^{1-x^2}\right)dx$$

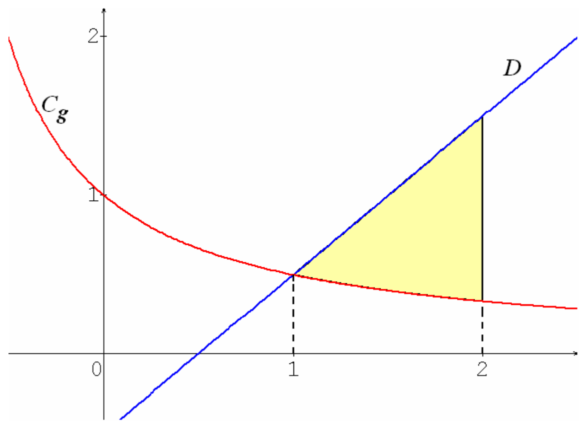
$$= \left[-e^{1-x^2}\right]_0^1 = -e^0 - (-e) = -1 + e \quad u.a.$$

<u>Aire d'un domaine entre deux courbes</u>

f et g sont deux fonctions définies sur l'intervalle $]-1;+\infty[$

par : $f(x) = x - \dfrac{1}{2}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

D et Cg sont leurs courbes représentatives dans le repère orthogonal ci-dessous :



On veut calculer l'aire du domaine compris entre la droite D et la courbe Cg sur l'intervalle $[1;2]$, c'est-à-dire l'aire coloriée en jaune.

> Sachant que la droite D est située au-dessus de la courbe Cg l'intervalle $[1;2]$
> l'aire cherchée est donnée par l'intégrale : $A = \int_1^2 \left(f(x) - g(x) \right) dx$

$$A = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x - \ln(x+1) \right]_1^2$$

et $\left[H(x) \right]_a^b = H(b) - H(a)$

$$= (2 - 1 - \ln 3) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \ln 2 \right)$$

$$= 1 - \ln \frac{2}{3}$$

$$\simeq 1{,}4 \quad u.a.$$