

# LIMITES DE SUITES

## I) Limite infinie d'une suite

**Propriété** : Tout nombre réel est compris entre deux entiers relatifs consécutifs ; pour tout nombre réel  $a$ , il existe deux entiers relatifs  $n$  et  $n + 1$  tels que :  $n \leq a \leq n + 1$ .

**Définition** : la suite  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$  si le terme général  $u_n$  de la suite peut être rendu aussi grand que l'on veut à condition de choisir  $n$  suffisamment grand.

**Remarques** :

① On écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

② La suite  $(u_n)$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$ .

**Conséquence** : Les suites de termes généraux  $\sqrt{n}, n, n^2, n^3$  tendent vers  $+\infty$  ;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty.$$

## II) Convergence d'une suite

**Définition** : Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels où  $n \in \mathbb{N}$ .

La suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  lorsque tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang  $n_0$ . On écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

**Remarque** : On utilise souvent des intervalles symétriques autour de  $\ell$ .

**Conséquences** :

① Soit la suite  $(u_n)$  de terme général  $u_n = \frac{1}{n}$ . Tout intervalle  $]-\beta; \beta[$  centré sur 0 contient tous les termes de la suite  $(u_n)$

à partir du rang  $n_0$  entier suivant le réel  $\frac{1}{\beta}$  : en effet, si  $n > n_0$ , alors  $n > \frac{1}{\beta}$  et donc  $\frac{1}{n} < \beta$ , c'est-à-dire  $u_n \in ]-\beta; \beta[ \dots$

alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ .

② Les suites de termes généraux  $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}$  tendent vers 0 ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ .

**Propriété** : Si une suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  alors cette suite a une seule limite,  $\ell$ .

**Théorèmes des gendarmes** : Si trois suites  $(u_n), (v_n)$  et  $(w_n)$  sont telles que :

① pour tout entier  $n$  supérieur à un certain rang,  $v_n \leq u_n \leq w_n$  ET ②  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ ,

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

**Remarque** : Le théorème des gendarmes démontré à partir de la définition de convergence d'une suite permet entre autres de montrer la convergence de suites alternées autour de leur limite.

### Exemples :

① Soit la suite  $(u_n)$  de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ . On a : pour tout  $n > 0$ ,  $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

② Soit la suite  $(u_n)$  de terme général  $u_n = \frac{\cos n}{n}$ . On a : pour tout  $n > 0$ ,  $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n} = 0.$$

### III) Opérations sur les suites convergentes

**Théorème** : Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergeant respectivement vers  $l$  et  $l'$ .

- La suite  $(u_n + v_n)$ , somme des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ , converge vers  $l + l'$ .
- La suite  $(\lambda u_n)$ , produit de la suite  $(u_n)$  par le réel  $\lambda$ , converge vers  $\lambda l$ .
- La suite  $(u_n \times v_n)$ , produit des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ , converge vers  $l \times l'$ .
- Si tous termes de  $(v_n)$  ne sont pas nuls ainsi que sa limite  $l'$ , alors la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ , quotient des deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ , converge vers  $\frac{l}{l'}$ .

**Exemple** : Soit la suite de terme général  $u_n = \frac{n+1}{2n}$ . On a :  $\frac{n+1}{2n} = \frac{n}{2n} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n}$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Conclusion : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

### IV) Limites et suites géométriques

**Théorème** : Soit un nombre réel  $q$  non nul.

- Si  $q > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ .
- Si  $0 < q < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ .
- Si  $-1 < q < 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ .

**Propriété** : Soit  $(u_n)$  la suite géométrique de raison  $q$ .

- Si  $0 < q < 1$  ou si  $-1 < q < 0$  alors la suite  $(u_n)$  converge vers 0.
- Si  $q > 1$ , la suite  $(u_n)$  diverge vers l'infini.