MATHEMATIQUES

TES3

Correction du Bac Blanc

Exercice 1:

Question	1	2	3	4	5	6	7	8
Réponse	3	1	2	3	2	1	2	1

Exercice 2:

Le coût marginal C est défini sur $[0;50]$ par : $C(x) = 2x + \dfrac{50}{x+1}$.

Montrons que $\quad C'_T(x) = C(x)$ et $C_T(0) = 50$

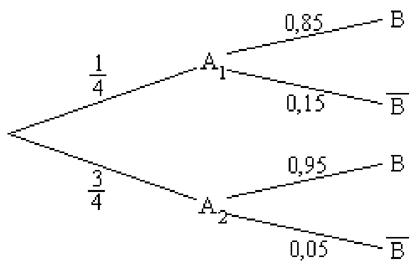
$C_T(x) = x^2 + 50\ln(u(x)) + 50 \qquad$ où $u(x) = x+1$; $\quad u'(x) = 1$

$C'_T(x) = 2x + 50 \times \dfrac{u'(x)}{u(x)} = 2x + \dfrac{50}{x+1} = C(x)$

de plus $C_T(0) = 0^2 + 50\ln(0+1) + 50 = 50$, donc on a bien $C_T(x) = x^2 + 50\ln(x+1) + 50$ comme fonction coût total.

Exercice 3:

1. (a) on a $P(A_1) = \dfrac{1}{4}$; $\quad P(A_2) = \dfrac{3}{4}$; $\quad P_{A_1}(B) = 0,85 \quad$ et $\quad P_{A_2}(B) = 0,95$
arbre pondéré :



(b) $A_1 \cap B$ est l'événement : « le jouet a été peint par la machine M_1 et il a été correctement peint ».

(c) $P(A_1 \cap B) = P_{A_1}(B) \times P(A_1) = 0,85 \times \dfrac{1}{4} = 0,2125$

(d) $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) \quad$ d'après la formule des probabilités totales

$= 0,2125 + P_{A_2}(B) \times P(A_2) = 0,2125 + 0,95 \times \dfrac{3}{4} = 0,925.$

(e) On cherche $P_B(A_1)$

$P_B(A_1) = \dfrac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,2125}{0,925} \simeq 0,23$

2. On choisit au hasard et de façon indépendante quatre jouets. On est alors en présence d'un schéma de Bernoulli.

(a) Soit X le nombre de jouets peints correctement. On cherche alors $P(X = 4)$.
$P(X = 4) = (P(B))^4 = (0,925)^4 \simeq 0,73$

(b) On cherche $P(X \leq 3)$
$P(X \leq 3) = 1 - P(X = 4) \simeq 0,27$

Exercice4: $(5\ points)$

1. (a) $\dfrac{45}{298} \approx 0,15 = 15\%$. 15% des clients sont abonés à la banque bank.net.

   (b) Taux d'accroissement $= \dfrac{103-45}{45} \approx 1,29 = 129\%$ Le taux d'accroissement de bank.net entre 2001 et 2006 est de 129%.

2. (a) L'équation de la droite d'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrées est : $y = 9,9x + 289$.

   (b) En 2010, $x = 10$ et $y = 9,9 \times 10 + 289 = 388$. On peut prévoir 388 000 clients.

3. $z = 0,165x + 3,642$

   (a) En remplaçant z par $\ln(q)$, on obtient :

$$\begin{aligned} z = 0,165x + 3,642 \iff ln(q) &= 0,165x + 3,642 \\ q &= \mathrm{e}^{0,165x+3,642} \\ q &= \mathrm{e}^{0,165x} \times \mathrm{e}^{3,642} \\ q &= \left(\mathrm{e}^{0,165}\right)^x \times 38,17 \\ q &= 38,17 \times 1,18^x \end{aligned}$$

   (b) En 2010, $q = 38,17 \times 1,18^{10} = 200$. On peut prévoir 200 000 clients,

4. En 2016, on a $x = 16$.
   D'où $y = 9,9 \times 16 + 289 \approx 447$.
   Et $q = 38,17 \times 1,18^{16} \approx 539$.
   Comme le nombre d'abonnés à la banque doit être supérieur au nombre d'abonnés à bank.net, on peut penser que le modèle n'est plus valable en 2016.

Exercice 5 :

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1+\ln x}{x^2}$.

1. (a) Pour $x\in[1;+\infty[$,

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{u(x)}{v(x)} \qquad \text{où } u(x)=-1+\ln x \;;\quad u'(x)=\frac{1}{x}$$

$$v(x)=x^2 \;;\quad v'(x)=2x$$

$$f'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-2x(-1+\ln x)}{(x^2)^2}=\frac{x-2x(-1+\ln x)}{x^4}=\frac{1+2-2\ln x}{x^3}=\frac{3-2\ln x}{x^3}$$

(b) $x^3>0$ sur $[1;+\infty[$, donc $f'(x)$ est du signe de $3-2\ln x$

$3-2\ln x>0$ nous donne $\ln x<\dfrac{3}{2}$ d'où $x<e^{\frac{3}{2}}$

donc $f'(x)>0$ sur $[1;e^{\frac{3}{2}}[$ et $f'(x)>0$ sur $]e^{\frac{3}{2}};+\infty[$

donc f est bien strictement croissante sur $[1;e^{\frac{3}{2}}[$ et strictement décroissante sur $]e^{\frac{3}{2}};+\infty[$.

2. $e\in[1;e^{\frac{3}{2}}[$, f est continue sur $[1;+\infty[$, de plus f est strictement croissante sur $[1;e^{\frac{3}{2}}[$

$f(1)=-\dfrac{1}{2}$ et $f(e)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1+\ln e}{e^2}=\dfrac{1}{2}>0$

donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]1;e[$.

3. On a $f(x)<0$ sur $]1;e[$, $f(x)>0$ sur $]e;+\infty[$ et $f(x)=0$ pour $x=e$.

PARTIE B

Soit g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{1}{2}x+1-\dfrac{\ln x}{x}$.

1. (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x+1=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

(b) $g(x)-\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)=-\dfrac{\ln x}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right)=0$ et la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}x+1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

(c) $x>0$ sur $[1;+\infty[$ et $-\ln x>0$ donne $\ln x<0$ d'où $0<x<1$

mais $x\in[1;+\infty[$, donc pour tout $x\in]1;+\infty[$, $-\ln x<0$, ce qui donne $g(x)-\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)<0$

Donc la courbe $\mathcal{C}$ est en-dessous de D sur $]1;+\infty[$.

FACULTATIF

2. $g(x)=\dfrac{1}{2}x+1-\dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x)=\ln x$; $u'(x)=\dfrac{1}{x}$

$v(x)=x$; $v'(x)=1$

$$g'=\frac{1}{2}-\frac{u'v-uv'}{v^2} \qquad \text{d'où} \qquad g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\frac{1}{2}-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{1}{2}+\frac{-1+\ln x}{x^2}=f(x)$$

3. Le coefficient directeur de T est égal à $g'(e)=f(e)$ or $f(e)=\dfrac{1}{2}$

Donc T et D ont le même coefficient directeur, elles sont donc parallèles.