Université Paris-Ouest -UFR SEGMI — Licence Sciences de Gestion
Statistiques appliquées à la gestion — 2011-2012

Correction succinte du contrôle n° 2
Sujet 1 et Sujet 2

Sujet 1

Exercice 1
Population étudiée : habitants de métropole.
Variable étudiée X : nombre de kilomètres effectués par jour en voiture. par des habitants de métropole.

1. Pour construire un intervalle de confiance, on se base sur un échantillon de taille $n = 15 < 30$, donc il faut supposer que X suit une loi normale. On note μ la moyenne de X et σ l'écart-type de X, inconnu.
2. Observations : $n = 15$, $\bar{x} = 17,4$, $s = 3,63$ et $s^\star = 3,76$.
On définit $\bar{X}_{15}$ le nombre moyen de kilomètres effectués sur 15 habitants pris au hasard.
Comme X est supposée de loi normale, avec σ inconnu (et $n < 30$)
$$T_{15} = \frac{\bar{X}_{15} - \mu}{\frac{S^\star_{sqrt15}}{15}} \sim \mathcal{T}(15)$$
avec $S^\star_{15}$ l'estimateur sans biais de σ
Avec les observations, un intervalle de confiance de μ au niveau 98% est :
$$[\bar{x} \pm Q_{T_{15}}(0,99)\frac{s^\star}{15}] = [14,85; 19,95]$$
où $Q_{T_{15}}(0,99) = 2,624$.

Exercice 2

1. Population étudiée : accidents.
Variable étudiée X : durée (en minutes) entre l'annonce d'un accident et son arrivée sur les lieux. par des habitants de métropole.
X est de une loi inconnue de moyenne μ et d'écart-type σ inconnu.
Observations : $n = 45$, $\bar{x} = 13,1$, $s^\star = 6,37$.
On définit $\bar{X}_{45}$ la durée moyenne de prise en charge sur 45 accidents pris au hasard.
Comme $n = 45 > 30$
$$Z_{45} = \frac{\bar{X}_{45} - \mu}{\frac{S^\star_{45}}{45}} \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{approximativement}$$

avec $S_{45}^{\star}$ l'estimateur sans biais de σ
Avec les observations, un intervalle de confiance de μ au niveau 90% est :

$$[\bar{x} \pm Q_{Z_{45}}(0,95)\frac{s^{\star}}{\sqrt{45}}] = [11,54; 14,66]$$

avec $Q_{Z_{45}}(0,95) = 1,645$.

2. On veut que $1,645\frac{s^{\star}}{\sqrt{n}} \leq 1$, c'est-à-dire $n \geq (1,645 * s^{\star}/1)^2$, ou $n \geq 109,84$.

Exercice 3

1. Population étudiée : clients renouvelant leur voiture.
Variable étudiée $X = 1$ si le client achète chez un concurrent ; $= 0$ sinon.
p est proportion de clients renouvelant leur voiture en achetant un modèle d'un concurrent.
Observations : $n = 500$, la proportion observée est $f_{500} = 0,35$.
On définit F_{500} proportion empirique sur 500 clients pris au hasard.
Comme $n = 500 > 30$, si $500 * F_{500} \geq 5$ et si $500 * (1 - F_{500}) \geq 5$, alors

$$Z_{500} = \frac{F_{500} - p}{\sqrt{\frac{F_{500}(1-F_{500})}{500}}} \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{approximativement}$$

Avec les observations, les conditions ci-dessus sont bien vérifiées ($500*0,35 \geq 5$ et $500*(1-0,35) \geq 5$) et un intervalle de confiance de p au niveau 95% est :

$$[f_{500} \pm Q_{Z_{500}}(0,975)\sqrt{\frac{f_{500}(1-f_{500})}{500}}] = [0,308; 0,392]$$

avec $Q_{Z_{500}}(0,975) = 1,96$.
Un intervalle de confiance de p au niveau 99% est :

$$[f_{500} \pm Q_{Z_{500}}(0,995)\sqrt{\frac{f_{500}(1-f_{500})}{500}}] = [0,295; 0,405]$$

avec $Q_{Z_{500}}(0,995) = 2,575$.

2. Le pourcentage de 40% appartient à l'intervalle de confiance pour un risque 99%. Mais celui n'y appartient pour un risque de 95% et est au-dessus des valeurs possibles pour p. Cela signifie que l'entreprise a des performances insuffisantes si on choisit un risque de 5% mais elles sont suffisantes si on choisit un risque de 1%.

Sujet 2

Exercice 1

1. Population étudiée : accidents.
   Variable étudiée X : durée (en minutes) entre l'annonce d'un accident et son arrivée sur les lieux. par des habitants de métropole.
   X est de une loi inconnue de moyenne μ et d'écart-type σ inconnu.
   Observations : $n = 45$, $\bar{x} = 11,68$, $s^\star = 5,28$.
   On définit $\bar{X}_{32}$ la durée moyenne de prise en charge sur 32 accidents pris au hasard.
   Comme $n = 32 > 30$
   $$Z_{32} = \frac{\bar{X}_{32} - \mu}{\frac{S^\star_{32}}{32}} \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{approximativement}$$
   avec $S^\star_{32}$ l'estimateur sans biais de σ
   Avec les observations, un intervalle de confiance de μ au niveau 90% est :
   $$[\bar{x} \pm Q_{Z_{32}}(0,95)\frac{s^\star}{\sqrt{32}}] = [10,14; 13,21]$$
   avec $Q_{Z_{32}}(0,95) = 1,645$.
2. On veut que $1,645\frac{s^\star}{\sqrt{n}} \leq 1$, c'est-à-dire $n \geq (1,645 * s^\star/1)^2$, ou $n \geq 3,02$.

Exercice 2
Population étudiée : habitants de métropole.
Variable étudiée X : nombre de kilomètres effectués par jour en voiture. par des habitants de métropole.

1. Pour construire un intervalle de confiance, on se base sur un échantillon de taille $n = 15 < 30$, donc il faut supposer que X suit une loi normale. On note μ la moyenne de X et σ l'écart-type de X, inconnu.
2. Observations : $n = 13$, $\bar{x} = 14,02$, $s = 3,74$ et $s^\star = 3,898$.
   On définit $\bar{X}_{13}$ le nombre moyen de kilomètres effectués sur 13 habitants pris au hasard.
   Comme X est supposée de loi normale, avec σ inconnu (et $n < 30$)
   $$T_{13} = \frac{\bar{X}_{13} - \mu}{\frac{S^\star_{sqrt13}}{13}} \sim \mathcal{T}(13)$$
   avec $S^\star_{13}$ l'estimateur sans biais de σ
   Avec les observations, un intervalle de confiance de μ au niveau 98% est :
   $$[\bar{x} \pm Q_{T_{13}}(0,99)\frac{s^\star}{13}] = [14,33; 20,13]$$
   où $Q_{T_{13}}(0,99) = 2,681$.

Exercice 3

1. Population étudiée : clients renouvelant leur voiture.
   Variable étudiée $X = 1$ si le client achète chez un concurrent ; $= 0$ sinon.
   p est proportion de clients renouvelant leur voiture en achetant un modèle d'un concurrent.
   Observations : $n = 400$, la proportion observée est $f_{400} = 0,3$.
   On définit F_{400} proportion empirique sur 400 clients pris au hasard.
   Comme $n = 400 > 30$, si $400 * F_{400} \geq 5$ et si $400 * (1 - F_{400}) \geq 5$, alors

   $$Z_{400} = \frac{F_{400} - p}{\sqrt{\frac{F_{400}(1-F_{400})}{400}}} \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{approximativement}$$

   Avec les observations, les conditions ci-dessus sont bien vérifiées ($400*0,3 \geq 5$ et $400 * (1 - 0,3) \geq 5$) et un intervalle de confiance de p au niveau 95% est :

   $$[f_{400} \pm Q_{Z_{400}}(0,975)\sqrt{\frac{f_{400}(1 - f_{400})}{400}}] = [0,255; 0,345]$$

   avec $Q_{Z_{400}}(0,975) = 1,96$.
   Un intervalle de confiance de p au niveau 99% est :

   $$[f_{400} \pm Q_{Z_{400}}(0,995)\sqrt{\frac{f_{400}(1 - f_{400})}{400}}] = [0,241; 0,359]$$

   avec $Q_{Z_{400}}(0,995) = 2,575$.
2. Le pourcentage de 35% appartient à l'intervalle de confiance pour un risque 99%. Mais celui n'y appartient pour un risque de 95% et est au-dessus des valeurs possibles pour p. Cela signifie que l'entreprise a des performances insuffisantes si on choisit un risque de 5% mais elles sont suffisantes si on choisit un risque de 1%.