

Exercice 2 - sur 7 points

On considère la fonction f définie sur $] - 1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = -2x + 5 + 3 \ln(x + 1)$$

1. a) Calculer la limite de f en -1 (à droite). Interpréter graphiquement le résultat.
 b) En admettant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 0$, calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f . Dresser le tableau de variation. Préciser la valeur exacte du maximum de $f(x)$.
3. a) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\alpha < 0 < \beta \quad \text{et} \quad f(\alpha) = f(\beta) = 0$$

- b) donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α et β .
- c) en déduire le signe de $f(x)$ sur $] - 1 ; +\infty[$.
4. Soit g la fonction définie sur $] - 1 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = (x + 1) \ln(x + 1) - x$$

- a) calculer $g'(x)$.
- b) en déduire, l'expression de la primitive F de g s'annulant pour $x = 0$.
- c) En admettant que $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} F(x) = 1$ dresser le tableau de variation de F sur l'intervalle $] - 1 ; +\infty[$.

*D'après le sujet du Bac ES
Amérique du Nord - Juin 2003*

Exercice 3 - Enseignement de spécialité - sur 5 points

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + 4$$

où a désigne un nombre réel.

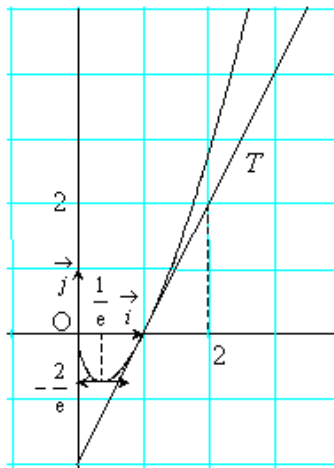
On pose $v_n = u_n - 6$ pour tout entier naturel n .

1. Déterminer le réel a pour que la suite (v_n) soit une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
2. Calculer v_n en fonction de n . La suite (v_n) est-elle convergente ?
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
4. Calculer la somme $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ en fonction de n . Étudier la convergence de la suite de terme général S_n . En déduire la limite de la suite ayant pour terme général la somme $\Sigma_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

*D'après un exercice du Bac ES
in TES Éditions Breal*

Exercice 1 :

La courbe ci-contre est la représentation graphique dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$. La droite (T) est sa tangente au point d'abscisse 1.



1. Par lecture graphique :

(a) Donner les valeurs de $f\left(\frac{1}{e}\right)$, de $f'(1)$.

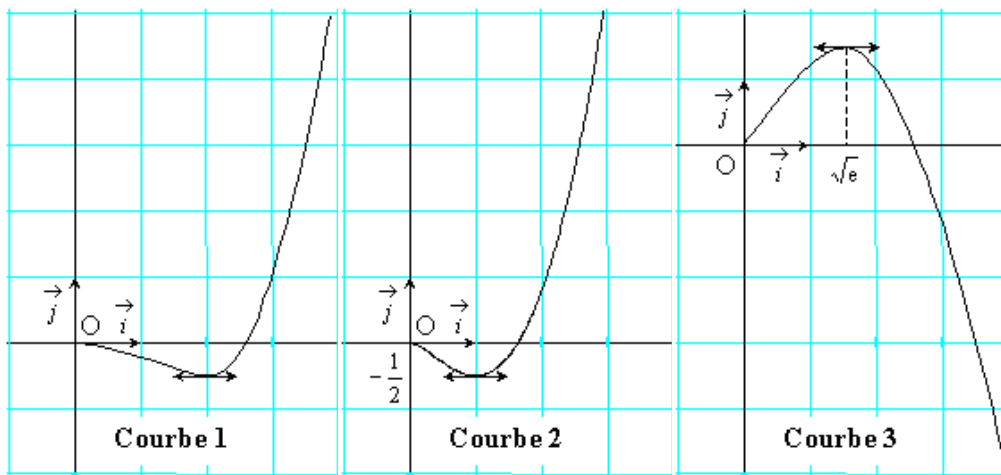
(On expliquera ce que représente $f'(1)$.)

(b) Dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $]0; 3]$. 2. On admet que f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (ax + b) \ln x$ où a et b sont des nombres réels.

(a) Soit f' la fonction dérivée de f . Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b .

(b) Déterminer alors les valeurs de a et b en utilisant la question 1.a).

3. L'une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une primitive de f sur $]0; +\infty[$. Indiquer le numéro de cette courbe en précisant les raisons de ce choix.



Exercice2:

1. L'équation $-3x^2 + bx + c = 0$ dans laquelle x est une variable réelle, (b et c sont des réels inconnus) admet deux solutions x_1 et x_2 , telles que $x_1 < x_2$.

En déduire l'exactitude ou l'inexactitude des affirmations ci dessous. Une bonne réponse apporte des points, une mauvaises réponse en retire. Si la note globale est inférieure à 0 elle sera ramenée à 0. L'absence de réponse ne retire ni n'apporte de point. Il n'est pas demandé de justifier les réponses : on se contentera d'écrire : « Affirmation n° ... : VRAI » ou « Affirmation n° ... : FAUX »

N°	Affirmation						
1	Si $x_1 < 0 < x_2$, le signe de $-3x^2 + bx + c$ sur l'intervalle $]-\infty; 0[$, est indiqué par le tableau : <div style="text-align: center; border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">x_1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; text-align: center;">—</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">0</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">+</td> </tr> </table> </div>	$-\infty$	x_1	0	—	0	+
$-\infty$	x_1	0					
—	0	+					
2	$\ln(-3x^2 + bx + c)$ est défini sur $[x_1; x_2]$.						

2. a) Résoudre l'équation : $x \in]1; 2[$, $\ln(3x - 1) + \ln(2 - x) = 0$

b) Résoudre l'inéquation : $x \in]1; 2[$, $\ln(3x - 1) + \ln(2 - x) > 1$