

# Complexes

## Comment trouver la forme algébrique d'un quotient :

On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur et on utilise l'égalité :

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

**Exemple 1 :**  $Z = \frac{3+i}{2-3i} = \frac{(3+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{6+9i+2i-3}{4+9} = \frac{3+13i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{11}{13}i$

**Exemple 2 :** soit le nombre complexe  $Z = \frac{z-i}{z+1}$  avec  $z = x+iy$ ,  $x$  et  $y$  étant réels  
écrire  $Z$  sous forme algébrique ( sachant que  $z \neq -1$  )

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{z-i}{z+1} = \frac{x+iy-i}{x+iy+1} = \frac{x+i(y-1)}{(x+1)+iy} && \leftarrow \begin{array}{l} \text{On met en évidence la forme algébrique} \\ \text{du dénominateur et du numérateur} \end{array} \\
 &= \frac{[x+i(y-1)][(x+1)-iy]}{[(x+1)+iy][(x+1)-iy]} && \leftarrow \begin{array}{l} \text{On applique la méthode citée au début} \end{array} \\
 &= \frac{x^2 + x - ixy + i(y-1)(x+1) - i^2 y(y-1)}{(x+1)^2 - iy(x+1) + iy(x+1) - i^2 y^2} \\
 &= \frac{x^2 + x - ixy + i(yx + y - x - 1) + y(y-1)}{(x+1)^2 + y^2} \\
 &= \frac{x^2 + x + y^2 - y + i(y-x-1)}{(x+1)^2 + y^2} = \frac{x^2 + x + y^2 - y}{(x+1)^2 + y^2} + i \frac{y-x-1}{(x+1)^2 + y^2}
 \end{aligned}$$

On sépare  
partie réelle  
et partie imaginaire

**Application :** a) trouver l'ensemble  $(E)$  des points  $M(z)$  tels que  $Z$  soit réel  
b) trouver l'ensemble  $(F)$  des points  $M(z)$  tels que  $Z$  soit imaginaire pur

a)  $Z$  réel  $\Leftrightarrow y-x-1=0$  avec  $(x,y) \neq (-1;0)$

$(E)$  est la droite d'équation  $y-x-1=0$  privée du point  $A$  d'affixe  $-1$

b)  $Z$  imaginaire pur  $\Leftrightarrow x^2 + x + y^2 - y = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$(F)$  est le cercle de centre  $\Omega\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$  et de rayon  $R = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  privé de  $A(-1)$