

# Les diélectriques

## I) Introduction

Dans la matière, un champ EM agit sur les atomes, les molécules ou les ions. Le milieu se polarise. Un champ électrique induit apparaît et s'ajoute au champ EM. Le but de ce Chapitre est d'expliquer comment ces phénomènes microscopiques se traduisent à l'échelle macroscopique

**Définition :** Un matériau **diélectrique est un milieu qui** ne contient pas de charges électriques susceptibles de se déplacer de façon macroscopique. A ce titre, on l'appelle parfois **isolant électrique**.

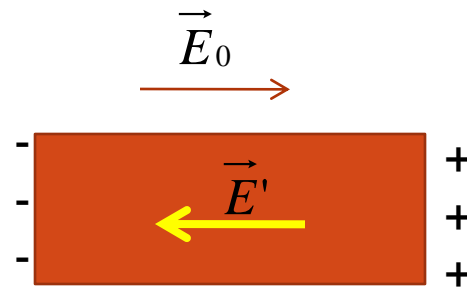
### Quelques milieux diélectriques solides usuels

- ❖ Le verre, utilisé pour faire des isolateurs de lignes haute tension
- ❖ La céramique, très utilisée pour les matériels HTB des postes électriques
- ❖ La plus part des plastiques
- ❖ Le Polypropylène, utilisé en particulier dans les condensateurs.

#### Rappel

Un conducteur placé dans un champ électrique

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{E}' + \vec{E}_0 = \vec{0}$$



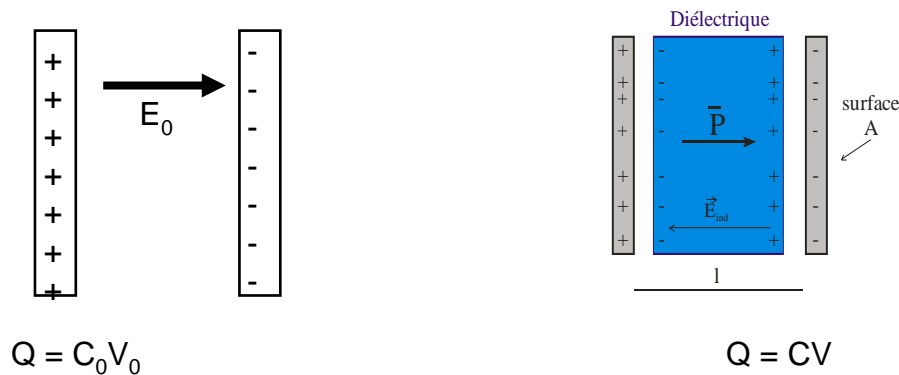
Comment se comporte un diélectrique en présence d'un champ électrique ?

## Expérience :

Introduisons un diélectrique entre les armatures d'un condensateur plan isolé.

### Le remplacement du vide par un diélectrique a 3 effets positifs

- ❖ Stabilité mécanique
- ❖ On peut appliquer une tension élevée
  - air  $3 \cdot 10^6$  V/m
  - plexiglas  $40 \cdot 10^6$  V/m
- ❖ L'insertion du diélectrique augmente la capacité du condensateur



Résultat : la capacité du condensateur augmente

### Interprétation :

**Condensateur isolé :  $Q = \text{constante}$**

Comme  $C > C_0$  donc  $V < V_0$

Le champ électrique à l'intérieur du condensateur a donc diminué

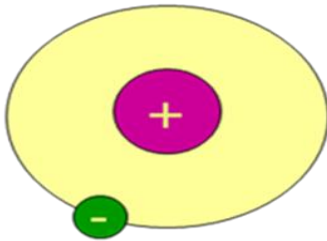
## Conséquence :

Apparition d'un champ interne  $E'$  dans le diélectrique. Il y a donc apparition de charges dans le diélectrique qui sont responsable du champ  $E'$  : on dit que le diélectrique **est polarisé**.

Quelle est l'origine de cette polarisation ?

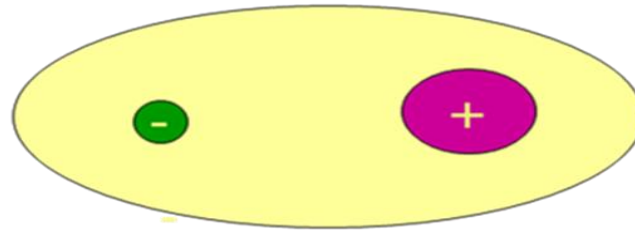
### II) Vecteur polarisation et densité de charge

Action d'un champ électrique sur un atome isolé



$E = 0$

❖  $E = 0$  : les centres de gravité des charges positives et des charges négatives sont confondus



Champ électrique



❖ Le champ électrique crée un dipôle induit. On dit que **l'atome est polarisé**.

## 1) Le vecteur polarisation

Pour un matériau, on aura une distribution de dipôles qui sera décrite par un champ vectoriel appelé vecteur polarisation.

La polarisation = la somme vectorielle de tous les dipôles par unité de volume

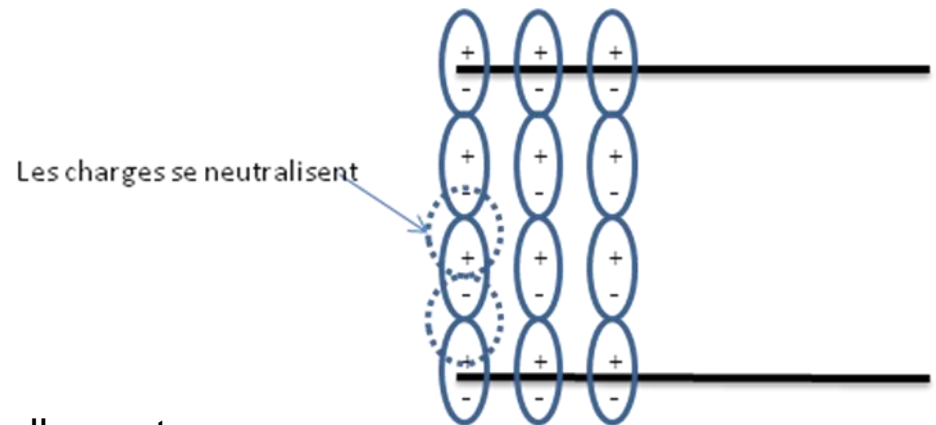
$$\vec{P} = \frac{1}{\Omega} \sum_{i \in \Omega} \vec{p}_i$$

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$$

L'unité de la polarisation est C/m<sup>2</sup>. C'est l'unité d'une densité de charge.

## 2) distribution de charge équivalente

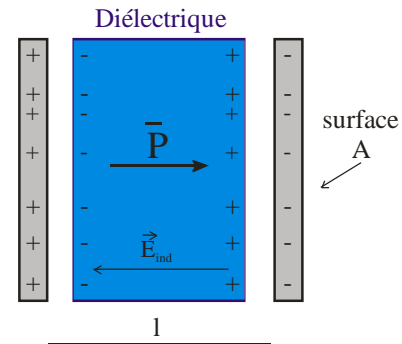
### a) Cas de polarisation uniforme



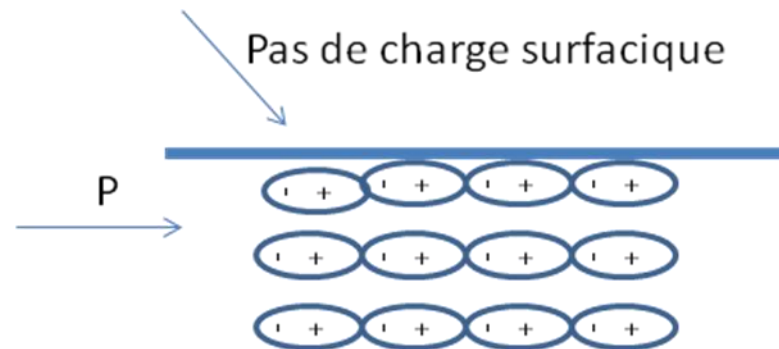
Les charges induites se neutralisent mutuellement :  
Il ne reste que des charges surfaciques

## Calcul de la polarisation

$$P = \frac{\overbrace{Q_{ind} l}^{\text{moment dipolaire}}}{\underbrace{Al}_{\text{volume}}} = \frac{Q_{ind}}{A} = \sigma_p$$



Si la polarisation est perpendiculaire à la normale de la surface du diélectrique :



Cas général :

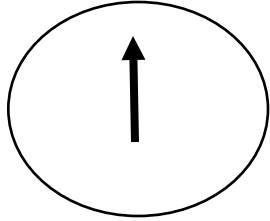
densité surfacique de charge  $\sigma_p$  :

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

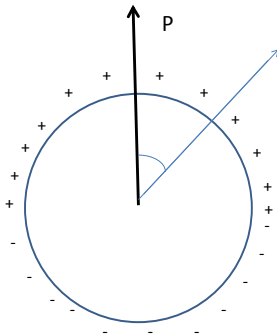
$\vec{n}$  est la normale à la surface.

# Exemple : Sphère polarisée :

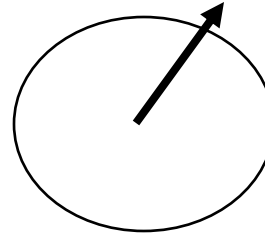
Polarisation suivant Oz



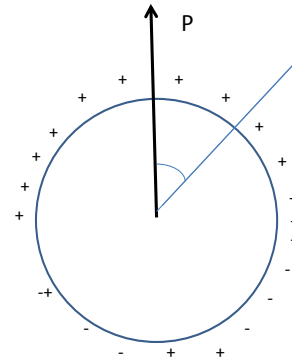
$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{e}_r = P \vec{k} \cdot \vec{e}_r = P \cos(\theta)$$



Polarisation suivant

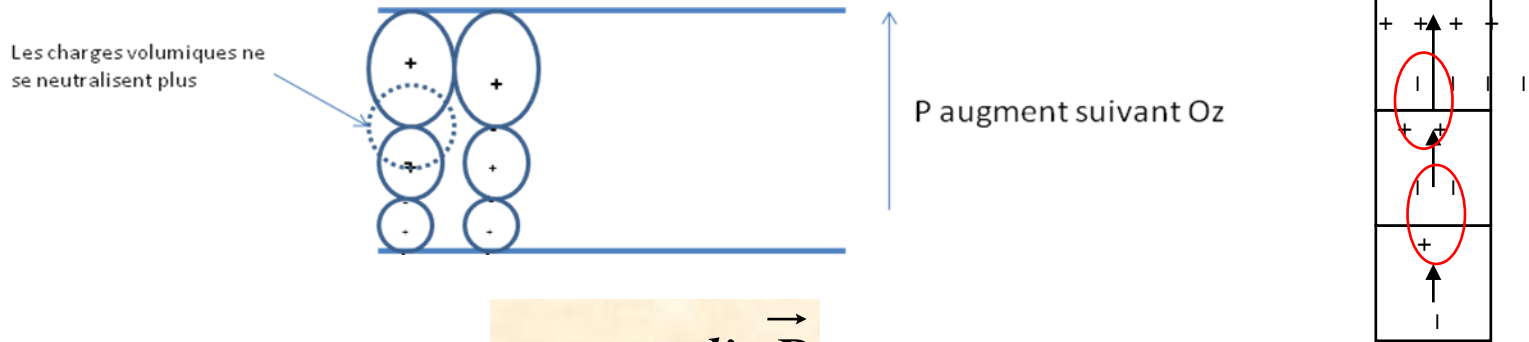


$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{e}_r = P \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = P$$



## b) Cas de polarisation non uniforme.

Si la polarisation est non uniforme, il apparaît aussi une densité de charge volumique



$$\rho_P = -\text{div} \vec{P}$$

### effet : ( exemple de la sphère polarisée radialement )

Soit  $Q_{\text{sortante}}$  la charge qui sort de la surface  $S$  limitant le diélectrique

$$Q_{\text{sortante}} = \int \sigma_{\text{pol}} dS = \int \vec{P} \cdot \vec{n} dS = \int \vec{P} \cdot \vec{dS}$$

Le diélectrique est initialement neutre. Donc l'excès de charge restant dans le volume du diélectrique est :

$$Q_{\text{pol}} = -Q_{\text{sortante}} = \int \sigma_{\text{pol}} dS = -\int \vec{P} \cdot \vec{dS}$$

$Q_{\text{pol}}$  peut être liée à une densité volumique de charge  $\rho_{\text{pol}}$

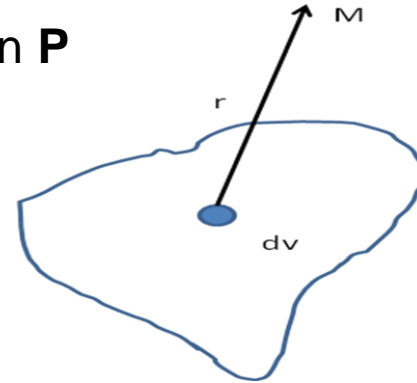
$$Q_{\text{pol}} = \iiint \rho_{\text{pol}} d\tau = -\iint \vec{P} \cdot \vec{dS} = -\iiint \text{div} \vec{P} d\tau \Rightarrow \rho_{\text{pol}} = -\text{div} \vec{P}$$

### III) Polarisation et potentiel électrostatique

Soit un diélectrique polarisé avec une polarisation  $\vec{P}$

Le potentiel créé par un dipôle  $d\vec{p}$  est :

$$dV = \frac{d\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$



$$V(M) = \int_v dV = \int \frac{d\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \int \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} dv$$

Cas de polarisation uniforme :

$$V = \vec{P} \cdot \int \frac{\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} dv = \vec{P} \cdot \vec{J}$$

$$\vec{J} = \int \frac{\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} dv$$

est un champ électrique créé par une densité de charge fictive  $\rho = 1$  répartie uniformément dans le volume du diélectrique



## Conclusion :

Pour déterminer le potentiel crée par un diélectrique polarisé **uniformément** soit :

On calcul directement le champ crée par les charges de polarisation

on détermine d'abord le champ crée par les charges fictives ( J ) puis on déduit le potentiel V

### Exemple d'application :

Exemple 1 : Cylindre polarisé uniformément selon son axe :

**Méthode 1 : à partir des charges de polarisation.**

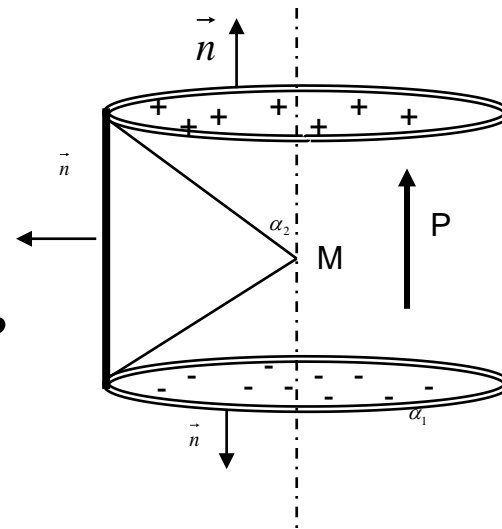
Calcul des charges de polarisation :

P uniforme donc :  $\rho_p = -\text{div}\vec{P} = 0$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

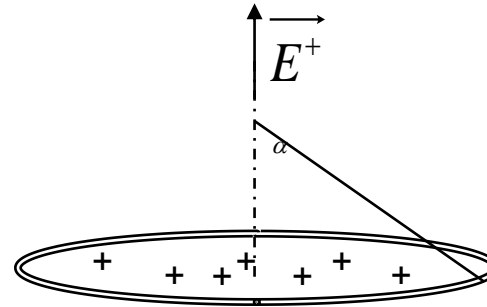
Base supérieur :  $\sigma_p = P$

Base inférieur :  $\sigma_p = -P$



Or le champ crée par un disque uniformément chargé est

$$E(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha)$$



D'où le champ crée au point M par les deux disques chargés : (M à l'intérieur du cylindre)

$$\vec{E}(M) = \vec{E}^+(M) + \vec{E}^-(M) = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha_1) \vec{k} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha_2) \vec{k} = \frac{-\vec{P}}{2\epsilon_0} (2 - \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

Cas d'un cylindre plat :

$$\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \vec{E}(M) = \frac{-\vec{P}}{\epsilon_0}$$

**Exemple 2 :** Sphère uniformément polarisée : calcul de E à l'intérieur de la sphère  
*Méthode 2 à partir du champ effectif*

Polarisation uniforme :

$$\sigma_p = P \cos(\theta)$$

On suppose le diélectrique chargé avec une densité de charge volumique  $\rho = 1$  et on détermine le champ fictif créé par cette densité:

### Cas $r < R$

1. On calcul le champ fictif créé par cette densité

Th de Gauss

$$\iint \vec{J} d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow r < R \quad \vec{J} = \frac{r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$$

2. On détermine le potentiel créé par ce champ effectif :

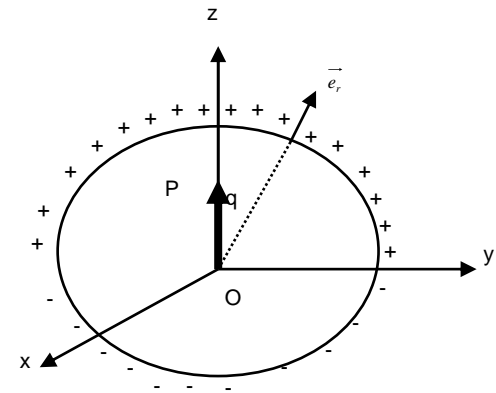
$$V = \vec{P} \cdot \vec{J} = P \frac{r}{3\epsilon_0} \vec{k} \cdot \vec{e}_r = \frac{Pr \cos(\theta)}{3\epsilon_0}$$

3. On déduit le champ créé par le diélectrique polarisé :

$$\vec{E}_d = -\vec{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = -\frac{1}{3\epsilon_0} (P \cos \theta \vec{e}_r - P \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

Soit :

$$\vec{E}_d = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$



### Cas $r > R$

$$\iint \vec{J} d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow r > R \quad \vec{J} = \frac{R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

$$V = \vec{P} \cdot \vec{J} \Rightarrow r > R \quad V = \frac{\vec{P} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{avec} \quad \vec{P} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P}$$

$$\vec{E}_d = -\vec{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2 \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta \right)$$

### III) Equations de l'électrostatique en présence de diélectrique

#### a) Le vecteur déplacement électrique :

En présence des charges libres ( $Q_l$ ) et des charges de polarisation ( $Q_p$ ), le théorème de Gauss devient :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{avec} \quad \rho = \rho_l + \rho_p$$

$\rho_p$  est une grandeur difficile à connaître. Le théorème de Gauss n'est pas pratique à utiliser. Cependant, on peut transformer ce théorème pour ne plus faire apparaître que les charges libres

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_l + \rho_p}{\epsilon_0} = \frac{\rho_l - \operatorname{div} \vec{P}}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_l$$

Posons :  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \longrightarrow \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho_l$

$\vec{D}$  est appelé vecteur excitation électrique ou le déplacement électrique. L'intérêt de ce vecteur est qu'il ne dépend plus explicitement que des charges libres.

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_l$$

**N.B.** En présence de charge libre et de polarisation, il est plus facile de déterminer d'abord  $D$  (qui ne dépend que des charges libres) puis en déduire le champ électrique et la polarisation.

## **b) relations entre le champ électrique et le vecteur déplacement électrique**

Pour des champs électriques pas très intenses, on peut écrire :

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + \varepsilon_0 [\chi] \vec{E} + \varepsilon_0 [D] \vec{E}^2 + \dots$$

$\vec{P}_0$  = polarisation spontanée ( non nulle que pour certains matériaux particuliers)

$[\chi]$  = tenseur susceptibilité électrique

### **Cas des milieux linéaires homogènes et isotropes :**

**La linéarité :** la polarisation est proportionnelle au le champ électrique moyen  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$   
Avec  $\chi$  est la susceptibilité diélectrique. En général est un tenseur.

**L'homogénéité** est associée à l'invariance par translation dans le milieu et signifie que  $\chi$  a la même valeur en tout point du milieu.

**L'isotropie** est associé à l'invariance par rotation et signifie que les propriétés physiques sont les même dans toutes les directions :  $\chi$  se réduit à un scalaire.

Pour un milieu LHI

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

avec

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

A l'aide de ces deux relations de bases pour les diélectriques : on déduit les autres :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

avec

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi)$$

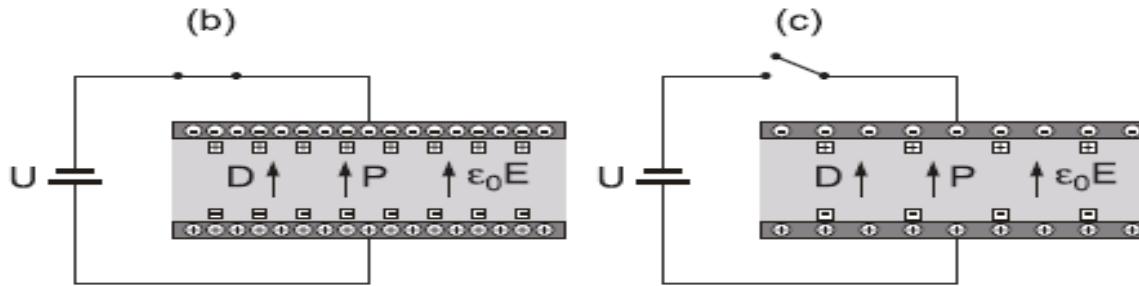
$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi$$

Est la permittivité relative

$$\vec{P} = \varepsilon \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E}$$

N.B. Comme  $\varepsilon > \varepsilon_0$ , la polarisation est toujours dirigée suivant la direction du Champ moyen  $\vec{E}$

## Cas d'un condensateur plan rempli avec un diélectrique



En présence du diélectrique, les équations locales sont :  $\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{lib}$  (1)       $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  (2)

Cas ou  $E = \text{cst}$  (b),

$$\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\longrightarrow \vec{D} = \epsilon_r \vec{D}_0$$

$$\longrightarrow \sigma_{lib} = \epsilon_r \sigma_{lib0}$$

de nouvelles charges doivent être amenées par la source sur les armatures du condensateur pour satisfaire l'eq (1)

La capacité du condensateur est

$$C = \epsilon_r Q_0 U = \epsilon_r C_0$$

Cas ou  $Q = \text{cst}$  (c),

$E$  doit diminuer pour satisfaire l'eq (1)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0 \quad \text{et} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\longrightarrow \vec{E}_0 = \epsilon_r \vec{E}$$

$$\longrightarrow C = \epsilon_r C_0$$

## IV) Les différents types de polarisation :

### 1) Notion de champ local

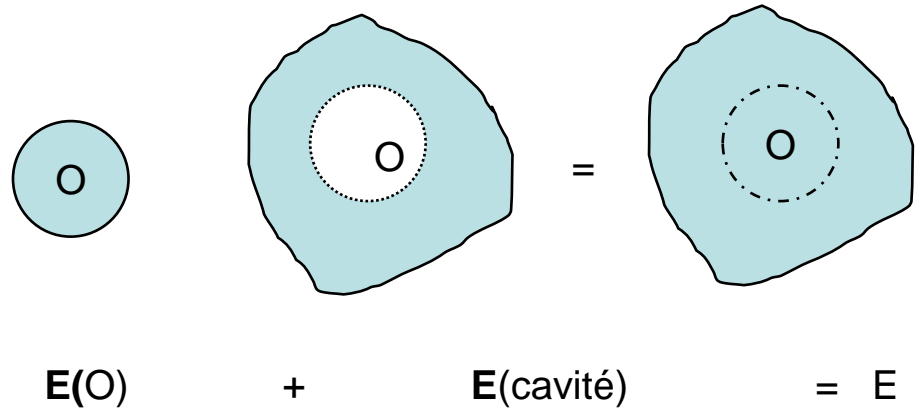
C'est le champ qui agit effectivement sur un atome ou molécule et provoque sa polarisation. Pour les milieux denses, le champ local diffère du champ moyen utilisé jusqu'à présent. Le champ local dépend cruciallement des proches voisins et son calcul ne peut être fait que par des modèles.

Dans le modèle de Lorentz, le champ local est donnée par :

$$\vec{E}_l = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

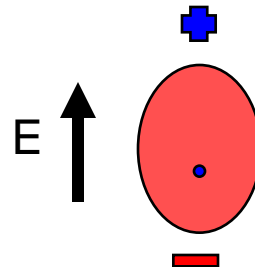
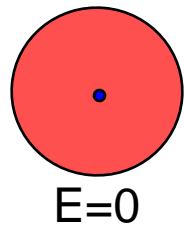
En effet :

$$\vec{E}_{cavité} = \vec{E}_{local} = \vec{E} - \vec{E}(O) = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$



### 2) La polarisation de déformation

• la polarisation électronique





## IV) Les différents types de polarisation :

### 1) Notion de champ local : Diélectriques à densité élevée:

En milieu condensé, les molécules sentent le champ électrique dû aux moments dipolaires de leurs voisins. Cet effet est traité dans une approximation de « champ moyen ». Le champ local se compose du champ externe  $\vec{E}$  et de la contribution des autres molécules à travers la polarisation  $\vec{P}$ .

Dans le modèle de Lorentz, le champ local est donné par :

$$\vec{E}_{loc} = \vec{E} + \frac{v}{\epsilon_0} \vec{P}$$

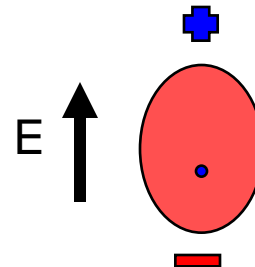
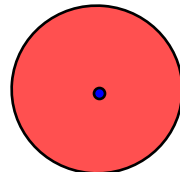
Si la molécule est sphérique :

$$\vec{E}_l = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

$$v=1/3$$

### 2) La polarisation de déformation

• la polarisation électronique



Toujours présente, due au déplacement et à la déformation du nuage électronique

Le moment dipolaire induit est  $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha_e \vec{E}_l$

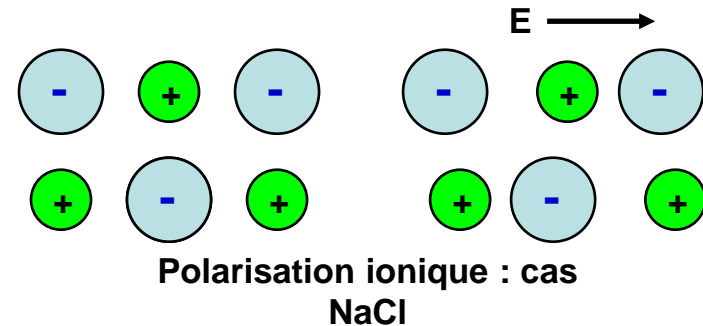
$\alpha_e$  = grandeur caractéristique de l'atome appelée **polarisabilité électronique**

### •la polarisation atomique ou ionique

Dans ce cas, il y a déplacement relative **des ions** et donc apparition d'un moment dipolaire supplémentaire

$$\vec{p} = \epsilon_0 \alpha_i \vec{E}_l$$

$\alpha_i$  est la polarisabilité ionique.



## 3) Susceptibilité et permittivité des diélectriques non polaires relation de Clausius – Mosotti

### 3-1) Relation entre la susceptibilité et la polarisabilité

Pour les diélectriques non polaires :

$$\vec{P} = N \vec{p} = N \epsilon_0 \alpha_d \vec{E}_l = N \epsilon_0 (\alpha_e + \alpha_i) \vec{E}_l$$

On utilisant la formule de Lorentz pour le champ local :

$$\vec{E}_l = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

On a :

$$\vec{P} = N\vec{p} = N\epsilon_0\alpha_d\vec{E}_l = N\epsilon_0\alpha_d\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}\right) \Rightarrow \vec{P} = \frac{N\epsilon_0\alpha_d}{1 - \frac{N\alpha_d}{3}}\vec{E}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0\chi\vec{E}$$



$$\chi_e^d = \frac{N\alpha_d}{1 - \frac{N\alpha_d}{3}}$$

Cette relation permet le lien entre une grandeur macroscopique  $\chi$  et une grandeur microscopique  $\alpha$

### 3-2) Relation de Clausius-Mosotti

On a  $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e) \Rightarrow \epsilon_r = 1 + \chi_e$



$$\chi_e^d = \frac{N\alpha_d}{1 - \frac{N\alpha_d}{3}} \Rightarrow \epsilon_r - 1 = \frac{N\alpha_d}{1 - \frac{N\alpha_d}{3}}$$

Soit

$$\frac{N\alpha_d}{3} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}$$

*Relation de Clausius-Mosotti*

Nombre d'Avogadro

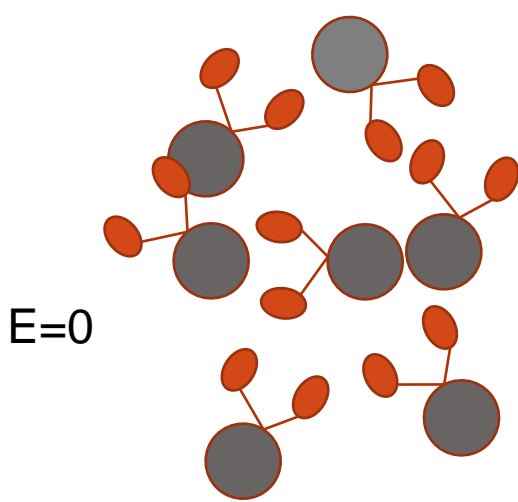
Or

$$N = \frac{N_A \rho}{M}$$

Masse molaire → Masse volumique

$$\frac{N_A \alpha_d}{3} = \frac{M}{\rho} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}$$

#### 4) La polarisation d'orientation C'est le cas des milieux polaires :

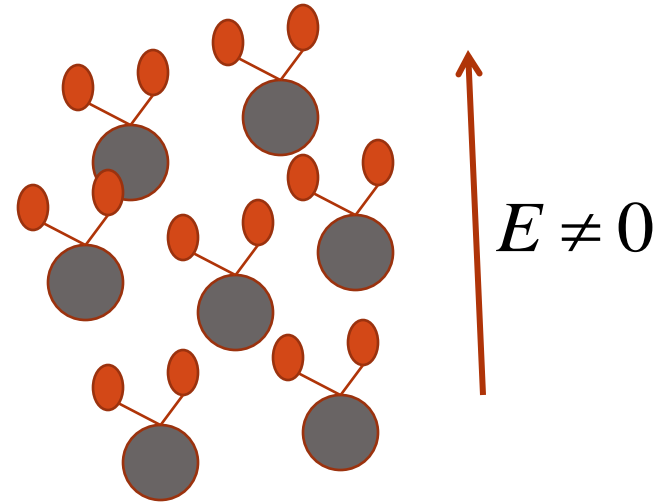


Si  $\mathbf{E}=0$ , les dipôle sont orientés au hasard


  $P = 0$

Pour les diélectriques polaires :


$$\alpha = \alpha_d + \alpha_o$$



L'application d'un champ électrique  
Tend à orientés les dipôles suivant  
La direction de  $E$  et l'agitation thermique  
Tend à créer le désordre

  
 $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha_o \vec{E}_l$

$$(\alpha_o = \frac{p^2}{3kT})$$

 Polarisation d'orientation

## 5) Diélectriques polaires : relation de Debye

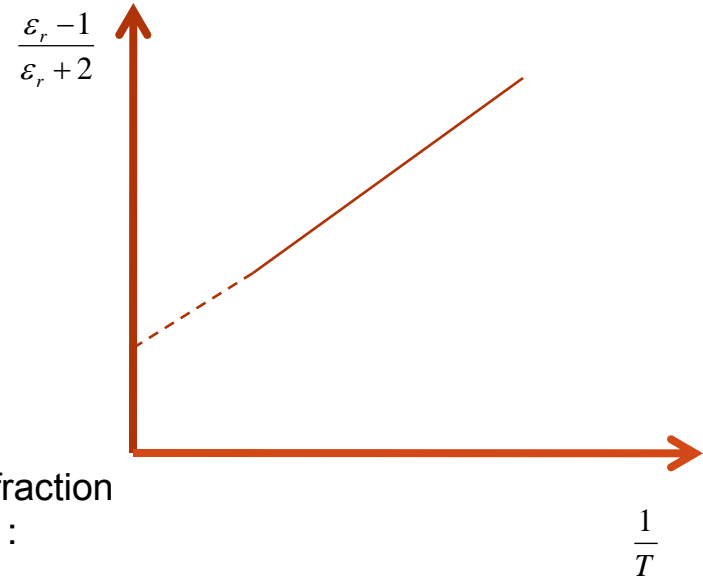
Généralisation de la relation de Clausius – Mossotti :

Polarisabilité = de déformation + d'orientation

$$\rightarrow \frac{N}{3} \left( \alpha_d + \frac{\mu^2}{3kT} \right) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}$$

Intérêt de cette relation :

Permet de déterminer le moment dipolaire et  
La polarisabilité de déformation



### Remarque :

Une équation connue depuis fort longtemps pour l'indice de réfraction des diélectriques est l'équation de *Lorentz-Lorentz* donnée par :

$$\frac{N\alpha_d}{3} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$$

Si  $n^2 = \epsilon_r$  l'équation de *Lorentz-Lorentz* se ramène à celle de *Clausius-Mossotti* sans la contribution des dipôles permanents.

## Constante diél. de certaines substances

La différence entre glace et eau est due à l'absence de polarisabilité rotationnelle dans la glace: les molécules sont figées. On retrouve le comportement apolaire pour le téflon.

Le groupement O-H donne une bonne polarité aux alcools.

Des liquides polaires (eau, alcools, acétone,...) sont de bons solvants (pour des molécules polaires), grâce à une forte interaction électrostatique.

**TABLE 3.2** Permittivities of some common materials [Von Hippel, 1954]

Material	$\epsilon/\epsilon_0$ at 1 MHz
vacuum	1
water	78.2
ice	4.15
sandy soil	2.59
teflon	2.1
ethyl alcohol	24.5
vaseline	2.16

## V) Relation de continuité

A la surface de séparation de deux diélectriques on a :

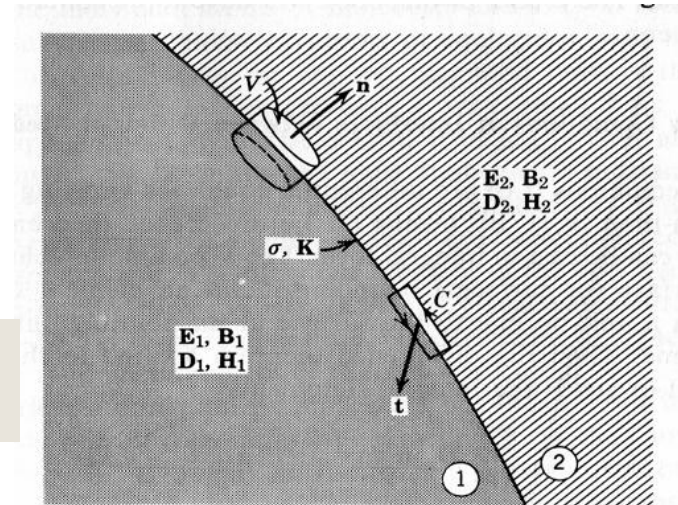
$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} & \Rightarrow E_{1t} = E_{2t} \longrightarrow \text{Continuité de la composante tangentielle de } E \\ \text{div} \vec{D} = \rho_{\text{lib}} & \Rightarrow D_{2n} - D_{1n} = \sigma_l \longrightarrow \text{Discontinuité de la composante normale de } D \end{cases}$$

Si  $\sigma_l = 0$   $D_{2n} = D_{1n}$



Continuité de la composante normale de D  
Et discontinuité de la composante normale de E

$$D_{2n} = D_{1n} \Rightarrow \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$



## VI) Energie électrostatique d'une distribution de charge en présence d'un diélectrique

Soit une distribution de charge volumique libre de densité  $\rho$  répartie dans le volume  $\tau$ . Plaçons dans la même région de l'espace un corps diélectrique de volume  $V$ . Quelle est la quantité d'énergie emmagasinée dans ce système ?

L'énergie électrostatique est

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho_l V(r) d\tau$$

Densité de charge libre

Potentiel crée par les charges libres et les charges de polarisation

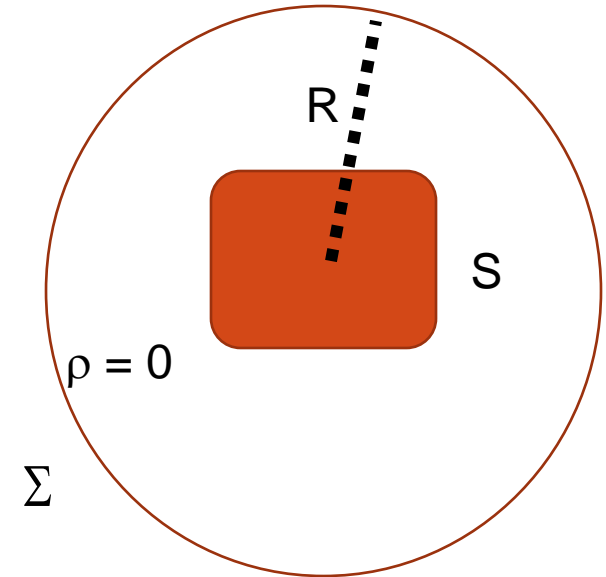
### • Expression de l'énergie en fonction du champ électrique

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_l \quad \Rightarrow \quad U_e = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho_l \operatorname{div} \vec{D} d\tau \quad \text{Or} \quad \operatorname{div} V \vec{D} = V \operatorname{div} \vec{D} + \vec{D} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} V$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow U_e &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \operatorname{div}(V \vec{D}) d\tau + \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \iint_S V \vec{D} dS + \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau \end{aligned}$$

S est la surface limitant le volume  $\tau$

Enfermant le diélectrique et les charges libres dans une sphère, de surface  $\Sigma$  de volume A et de rayon R tel que  $\rho = 0$  à l'extérieur de S.



Si on fait tendre R vers l'infini on a :

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\text{varie en}} \frac{1}{R} \\ D &\xrightarrow{\text{varie en}} \frac{1}{R^2} \quad \Rightarrow \quad V \vec{D} \cdot d\vec{S} \xrightarrow{\text{varie en}} \frac{1}{R} \quad \Rightarrow \quad \int_{\Sigma}^{R \rightarrow \infty} V \vec{D} \cdot d\vec{S} \rightarrow 0 \\ dS &\xrightarrow{\text{varie en}} R^2 \end{aligned}$$





$$U_e = \frac{1}{2} \int_A \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau = \frac{\epsilon}{2} \int_{\text{espace}} E^2 d\tau$$

N.B Dans le vide, on a  $U'_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{espace}} E^2 d\tau$

La différence  $U_e - U'_e = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{2} \int_{\text{espace}} E^2 d\tau$  sert à polariser le diélectrique

### **Exercices d'applications**

Déterminer le champ crée par un diélectrique sous forme d'un cylindre infini polarisé perpendiculairement à son axe .

Solution

P uniforme, la densité de charge surfacique sur la surface latérale est :  $\sigma = P \vec{e}_y \cdot \vec{e}_r = P \sin \theta$

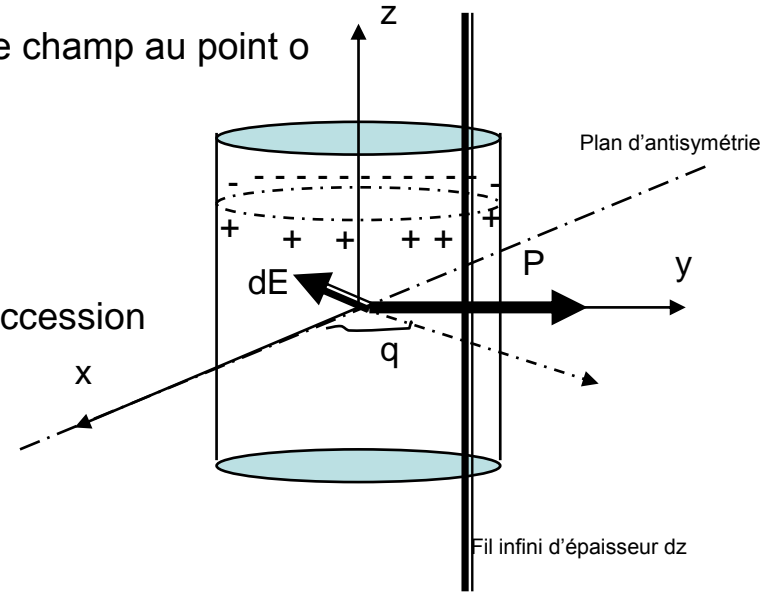
### Symétrie :

Le plan (ox,-ox) est un plan d'antisymétrie, donc le champ au point o est suivant Oy

$$\longrightarrow \vec{E} = E \vec{e}_y$$

Pour calculer le champ, on partage le cylindre infini en une succession de fils infinis d'épaisseur  $Rd\theta$  et de densité de charge

$$\lambda = \sigma R d\theta = P \sin \theta R d\theta$$



Or le champ crée par un fil infini au point O est :

$$dE = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \longrightarrow dE_y = dE \vec{e}_y = -dE \sin \theta$$

$$\vec{E} = -\frac{P}{2\epsilon_0} \vec{e}_y = -\frac{\vec{P}}{2\epsilon_0}$$