Le cours avec les aides animées

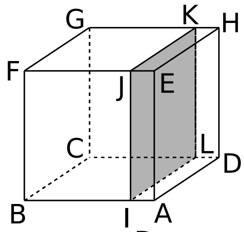
Q1. Quelle est la nature de la section d'un pavé par un plan parallèle à une face ?

Q2. Quelle peut être la nature de la section d'une sphère par un plan ?

Q3. Quelle est la nature de la section d'un cône par un plan parallèle à sa base ?

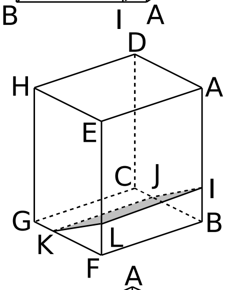
Les exercices d'application

1 *Sections d'un pavé droit (1)*



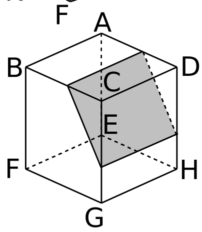
a. On a réalisé la section du cube ABCDEFGH par un plan parallèle à la face BCGF.

La section est un carré .



b. On a réalisé la section du pavé droit ABCDEFGH par un plan parallèle à l'arête [DH].

La section est un rectangle .



c. On a réalisé la section du cube ABCDEFGH par un plan parallèle à l'arête [EF].

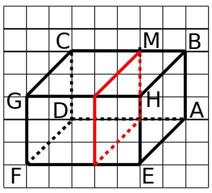
La section est un rectangle

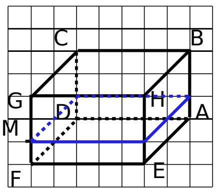
2 *Avec un quadrillage*

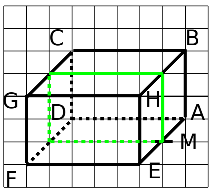
a. Dessine en rouge la section du pavé ABCDEHGF par le plan contenant M et parallèle à la face DFGC.

b. Dessine en bleu la section du pavé ABCDEHGF par le plan contenant M et parallèle à la face ADFE.

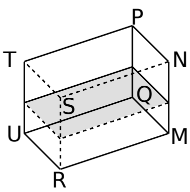
c. Dessine en vert la section du pavé ABCDEHGF par le plan contenant M et perpendiculaire à l'arête [BH].



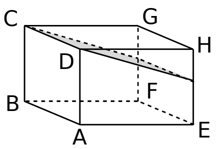




3 *Définir la section*



a. Le polygone gris est une section du pavé droit MNPQRSTU par un plan parallèle à la face STPN .



b. Le polygone gris est une section du pavé droit ABCDEFGH par un plan parallèle à l'arête [GH] .

4 *Sections d'un pavé droit (2)*

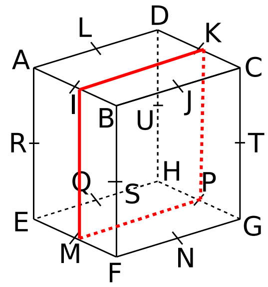
Les points I, J, K, L, M, N, P, Q, R, S, T et U sont les milieux des arêtes du pavé droit ABCDEFGH.

a. Trace en rouge la section du pavé par le plan contenant le point P et parallèle à la face ADHE.

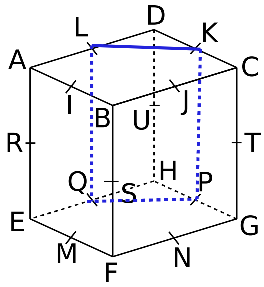
b. Trace en bleu la section du pavé par le plan contenant le point Q et parallèle à l'arête [BF] sans être parallèle au plan ABFE.

c. Trace en vert la section du pavé par le plan contenant le point E et parallèle à l'arête [DC] sans être parallèle aux plans ABFE et EHGF.

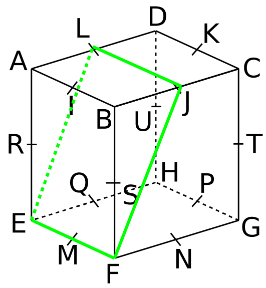
a.



b.

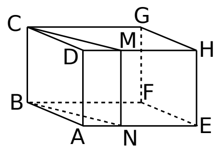


c.



5 *Calculs*

La figure ci-contre représente le pavé droit ABCDEFGH et sa section BCMN.
On donne AB = 5 cm ; BC = 4 cm et AE = 6 cm.



a. Quelle est la nature du quadrilatère BCMN ?

Le quadrilatère BCMN est la section du pavé par un plan parallèle à l'arête [DA] donc BCMN est un rectangle .

b. Sachant que MD = 2 cm, calcule les dimensions exactes de BCMN.

Le triangle CDM est rectangle en D, donc d'après le théorème de Pythagore, on a $CM^2 = CD^2 + DM^2$;

soit $CM^2 = 5^2 + 2^2 = 29$.

CM > 0 donc $CM = \sqrt{29}$.

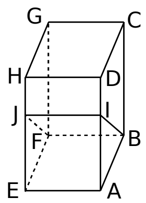
Les dimensions exactes du rectangle BCMN sont $\sqrt{29}$ cm et 4 cm .

c. Calcule l'aire de BCMN arrondie au mm².

$A_{BCMN} = 4 \times \sqrt{29} = 4\sqrt{29}$ cm²

$A_{BCMN} \approx 21{,}54$ cm².

6 *Construction*



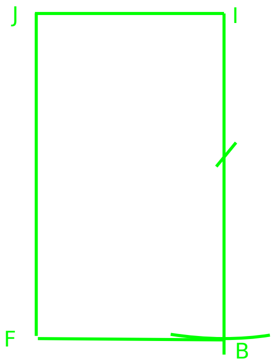
ABCDEFGH est un pavé droit, on donne AB = 3,5 cm ; AE = 2,5 cm et AD = 4 cm. Le quadrilatère BIJF est la section du pavé par le plan parallèle à l'arête [AE] contenant le point B et le point I de [AD] tel que AI = 2,5 cm.

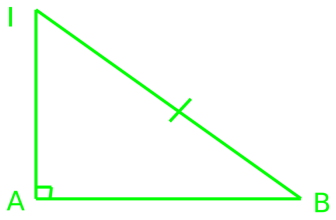
a. Construis le triangle AIB en vraie grandeur.

La face ABCD est un rectangle donc le triangle AIB est rectangle en A.

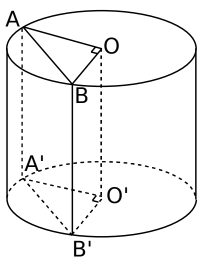
b. Construis la section BIJF en vraie grandeur.

BIJF est la section du pavé par un plan parallèle à l'arête [BF] donc BIJF est un rectangle .





7 *Cylindre*



On réalise la section ABB'A' par un plan parallèle à l'axe d'un cylindre de hauteur [OO'] mesurant 5 cm et de rayon [OA] mesurant 3 cm, de sorte que le triangle AOB soit rectangle en O.

a. Précise la nature du triangle AOB.

[OA] et [OB] sont deux rayons du cercle de centre O et de rayon [OA] donc AOB est un triangle rectangle et isocèle en O .

b. Quelle est la nature de la section ABB'A' ?

La section d'un cylindre par un plan parallèle à son axe est un rectangle donc ABB'A' est un rectangle .

c. Calcule l'aire de ABB'A' arrondie au dixième.

Le triangle AOB est rectangle en O donc d'après le théorème de Pythagore, on a : $OA^2 + OB^2 = AB^2$;

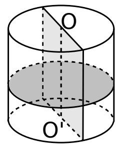
soit $AB^2 = 3^2 + 3^2 = 18$.

$AB > 0$ donc $AB = \sqrt{18}$ cm.

$AB \times AA' = \sqrt{18} \times 5^2 \approx 21{,}2$ cm² .

L'aire de ABB'A' est d'environ 21,2 cm².

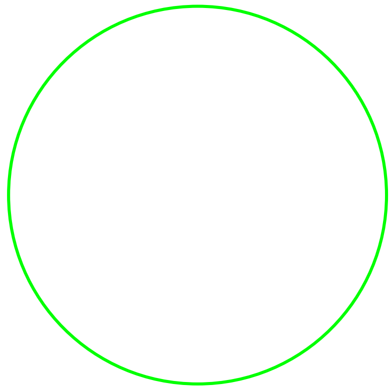
8 *Sections de cylindre*

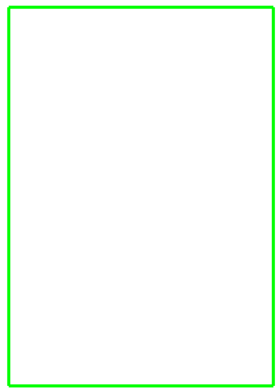


On considère un cylindre de révolution de rayon 2,5 cm et de hauteur 3,5 cm.

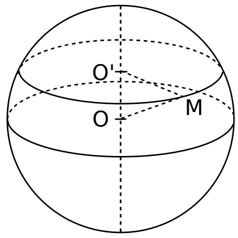
a. Dessine, ci-dessous, en vraie grandeur, la section du cylindre par un plan perpendiculaire à son axe (OO').

b. Dessine ci-dessous en vraie grandeur la section de ce cylindre par un plan parallèle à son axe contenant O et O'.





9 *Sphère*



On réalise la section d'une sphère de centre O et de rayon 4 cm par un plan passant par le point O' situé à 2 cm de O.

a. M étant un point de la section, quelle est la nature du triangle OO'M ?

O est le centre de la sphère, O' le centre de la section donc le triangle OO'M est un triangle rectangle en O' .

b. Calcule la valeur exacte du rayon de la section puis donne la valeur arrondie au millimètre.

Le triangle OO'M est rectangle en O', donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$OO'^2 + O'M^2 = OM^2$;

soit $O'M^2 = OM^2 - OO'^2 = 12$.

$O'M > 0$ donc $O'M = \sqrt{12} \approx 3{,}5$ cm .

Le rayon de la section est d'environ 35 mm.

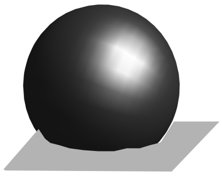
c. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{O'OM}$ à 1° près.

Dans le triangle OO'M rectangle en O', [OM] est l'hypoténuse du triangle et [OO'] le côté adjacent à l'angle $\widehat{O'OM}$. Donc $\cos \widehat{O'OM} = \dfrac{OO'}{OM}$;

soit $\cos \widehat{O'OM} = \dfrac{2}{4} = 0{,}5$.

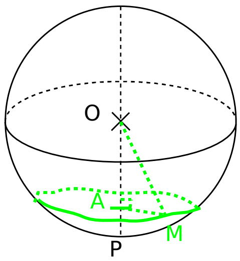
D'où l'angle $\widehat{O'OM}$ mesure 60° à 1° près.

10 *Boule de pétanque*



Une boule de pétanque de rayon 3,6 cm lancée dans le sable a laissé une empreinte ayant la forme d'une calotte sphérique délimitée par un cercle de rayon 2,3 cm.

a. Complète le schéma de la situation à la main en traçant la ligne de section, son centre A et un point de la section M.
O est le centre de la boule et P le point le plus profond de la trace.

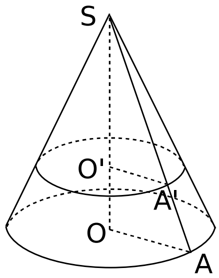


b. Calcule la profondeur de la trace à 1 mm près.

La section d'une sphère par un plan est le cercle de centre A et de rayon [AM], O est le centre de la sphère donc le triangle OAM est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, on a :
$OA^2 + AM^2 = OM^2$ donc $OA^2 = OM^2 - AM^2$ donc
$OA^2 = 7{,}67$. $OA > 0$ $OA = \sqrt{7{,}67}$ cm.
$AP = OP - 0A = 3{,}6 - \sqrt{7{,}67} \approx 0{,}8$ cm
La profondeur de la trace est de 0,8 cm.

11 *Cône*

On réalise la section d'un cône de révolution ($\mathscr{C}$), de sommet S et de base le disque de centre O et de génératrice [SA], par un plan parallèle à la base passant par le point A' de la génératrice [SA]. SA = 8 cm ; SO = 6 cm et SA' = 5 cm.



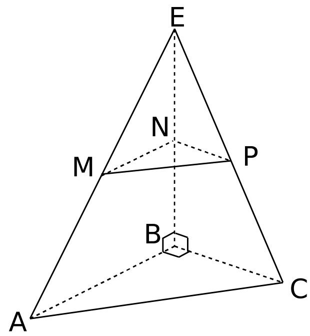
a. Montre que le cône de révolution ($\mathscr{C}$') de sommet S et de base le disque de rayon [O'A'] est une réduction du cône SOA.

Les droites (OA) et (O'A') sont parallèles et les droites (OO') et (AA') sont sécantes en S donc d'après le théorème de Thalès, on a : $\dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{O'A'}{OA} = \dfrac{5}{8}$. Les dimensions du cône ($\mathscr{C}$') sont proportionnelles à celles du cône ($\mathscr{C}$) donc le cône ($\mathscr{C}$') est une réduction du cône ($\mathscr{C}$) de rapport $\dfrac{5}{8}$.

b. Quel est le rapport des volumes des deux cônes ?

$\dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{5}{8}$ donc le cône ($\mathscr{C}$') est une réduction du cône ($\mathscr{C}$) de rapport $\dfrac{5}{8}$. Le rapport des volumes est $\left(\dfrac{5}{8}\right)^3$ soit $\dfrac{125}{512}$

12 *Une pyramide*



EABC est un tétraèdre tel que AB = 3 cm ;
BC = 2 cm et BE = 4 cm.
MNP est la section de la pyramide par un plan parallèle à la base passant par le point N de [EB] tel que EN = 1,6 cm.

a. Quelle est la nature du triangle MNP ?

Le triangle MNP est la section de la pyramide EABC par un plan parallèle à sa base donc MNP est de la même nature que ABC soit un triangle rectangle en N.

b. Calcule la valeur exacte de MN.

Les droites (MA) et (NB) sont sécantes en E et (MN) est parallèle à (AB) donc d'après le théorème de Thales, on a : $\dfrac{EM}{EA} = \dfrac{EN}{EB} = \dfrac{MN}{AB}$ donc $\dfrac{MN}{3} = \dfrac{1{,}6}{4}$
d'où $MN = \dfrac{3 \times 1{,}6}{4} = 1{,}2$ cm.

c. Calcule la valeur exacte de NP.

Les droites (PC) et (NB) sont sécantes en E et (PN) est parallèle à (BC) donc d'après le théorème de Thales, on a : $\dfrac{EN}{EB} = \dfrac{EP}{EC} = \dfrac{PN}{BC}$ donc $\dfrac{PN}{2} = \dfrac{1{,}6}{4}$ d'où
$MN = \dfrac{2 \times 1{,}6}{4} = 0{,}8$ cm.

d. Calcule la valeur exacte de MP.

MNP est un triangle rectangle en N donc d'après le théorème de Pythagore, on a : $MN^2 + NP^2 = MP^2$
soit $MP^2 = 0{,}8^2 + 1{,}2^2 = 2{,}08$
$MP > 0$ donc $MP = \sqrt{2{,}08}$ cm.

e. Compare les rapports des longueurs, des aires de base et des volumes.

- Rapport des longueurs : $\dfrac{EB}{EN} = \dfrac{4}{1{,}6} = 2{,}5$
- $A_{ABC} = \dfrac{AB \times BC}{2} = \dfrac{3 \times 2}{2} = 3 \text{ cm}^2$

  $A_{MNP} = \dfrac{MN \times NP}{2} = \dfrac{0{,}8 \times 1{,}2}{2} = 0{,}48 \text{ cm}^2$

  Rapport des aires : $\dfrac{A_{ABC}}{A_{MNP}} = \dfrac{3}{0{,}48} = 6{,}25$
- $V_{EABC} = \dfrac{3 \times 4}{3} = 4 \text{ cm}^3$

  $V_{EMNP} = \dfrac{0{,}48 \times 1{,}6}{3} = 0{,}256 \text{ cm}^3$

  Rapport des volumes : $\dfrac{V_{EABC}}{V_{EMNP}} = \dfrac{4}{0{,}256} = 15{,}625$

On remarque que $2{,}5^2 = 6{,}25$ et $2{,}5^3 = 15{,}625$.
Le rapport des longueurs est de 2,5 ; le rapport des aires est $2{,}5^2$ et le rapport des volumes est $2{,}5^3$.